探析指、对数组合型函数导数问题求解策略

——从一道2020年高考函数导数题谈起

福建省莆田第二中学　　蔡海涛

本文系2020年福建省电化教育馆课题《基于动态数学技术环境高中实验教学的实践研究》（课题编号闽教电馆KT2042）研究成果.

纵观近年高考和各地市高三模拟考试题，指、对数组合型函数导数问题频频出现.这类问题主要考查恒成立、零点、不等式证明等问题.由于此类问题综合性较强，对考生的逻辑思维能力要求较高，难度较大，很多学生束手无策.本文以一道2020年高考函数导数题为例，探析求解这类问题的求解策略.

一、试题呈现

（2020年新高考数学全国Ⅰ卷第21题）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,\ f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f\left(x\right)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

试题以含 e^x 与 $\ln x$ 组合型的初等函数为载体，考查了利用导数研究切线、含参数不等式恒成立等知识，考查了运算求解能力，考查函数与方程思想，考查直观想象、逻辑推理等核心素养，体现综合性、应用性.试题题干结构简洁，解法多样，不同解法思想方法的差异及方法选择的优劣实现了很好的考试选拔功能.

二、解法探究

（1）三角形面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times|\frac{-2}{\mathrm{e}-1}|=\frac{2}{\mathrm{e}-1}$.（过程略）

（2）**解法1** 因为 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$ ，所以 $f'(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x}$ ，

设 $g(x)=f'(x)$ ，则 $g'(x)=a\mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$ ，显然 $a>0$ ，

所以 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，即 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，

当 $a=1$ 时， $f'(1)=0$ ，所以 $f\left(x\right)_{min}=f\left(1\right)=1$ ，则 $f\left(x\right)\geqslant 1$ 成立.

当 $a>1$ 时， $0<\frac{1}{a}<1$ ，所以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{a}-1}<1$ ，则 $f'(\frac{1}{a})f'(1)=a(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$ ，

故存在唯一$x_0>0$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，且当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)<0$，

当$x\in(x_0,+\infty)$时$f'(x)>0$，由$ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，得$\ln a+x_0-1=-\ln x_0$，

因此$f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a$

$=\frac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geqslant 2\ln a-1+2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$

即$f\left(x\right)>1,$则$f\left(x\right)\geqslant 1$恒成立；

当$0<a<1$时，$f(1)=a+\ln a<a<1,$所以$f(1)<1, f(x)\geqslant 1$不恒成立.

综上所述，实数a的取值范围是$\left[1,+\infty\right)$.

点评 解法1把$f\left(x\right)\geqslant 1$恒成立转化为$f\left(x\right)_{\min}\geqslant 1$，故利用导数研究函数$f\left(x\right)$的单调性，首先得导函数$f'\left(x\right)$在区间$(0,+\infty)$单调递增，当$a=1$与$0<a<1$时两种情况易得，当$a>1$时，可证$f'(\frac{1}{a})f'(1)<0$，从而$f'\left(x\right)$存在隐零点$x_0$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，得到$f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)$，再利用基本不等式可以证得$f\left(x\right)\geqslant 1$恒成立. 综上得$a$的取值范围. 此解法的思路为把恒成立问题转化求函数最值，求函数的最值利用隐零点进行处理.

解法2 $f\left(x\right)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a=e^{\ln a+x-1}-\ln x+\ln a\geqslant 1$等价于

$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geqslant \ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$.

令$g\left(x\right)=e^{x}+x$，上述不等式等价于$g\left(\ln a+x-1\right)\geqslant g\left(\ln x\right)$,

显然$g\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以上式可化为$\ln a+x-1\geqslant \ln x$，即$\ln a\geqslant \ln x-x+1$，

令$h\left(x\right)=\ln x-x+1,$则$h'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

当$x\in\left(0,1\right)$时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$单调递增；当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$单调递减，所以$h\left(x\right)_{max}=h\left(1\right)=0$，则$\ln a\geqslant 0$，即$a\geqslant 1$，所以$a$的取值范围是$\left[1,+\infty\right)$.

点评 解法2利用同构. 具体思路是先发现$ae^{x-1}=e^{\ln a+x-1}$，进而把$f\left(x\right)\geqslant 1$等价转换

为$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geqslant \ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$，构造函数$g\left(x\right)=e^{x}+x$，则实现同构，进一步等价转化为$\ln a\geqslant \ln x-x+1$，令$h\left(x\right)=\ln x-x+1$，利用导数求得$h\left(x\right)_{max}$，进而根据不等式恒成立的意义得到关于$a$的对数不等式，解得$a$的取值范围.

同构往往是处理指对数函数跨阶函数式的证明.同构式需要构造一个母函数，即外函数，表示为$h(x)$，这个母函数的特征为指对跨阶、单调性易求，常见的函数模型有：$y=xe^{x}$，$y=e^{x}-x$，$y=\dfrac{x}{e^{x}}$，$y=x+\ln x$，$y=x\ln x$，$y=\dfrac{\ln x}{x}$等.

解法3 令$g\left(x\right)=x+\ln x$，易知$g\left(x\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$单调递增，且$g\left(1\right)=1$.

由$f\left(x\right)\geqslant 1$，令$x=1$得$f\left(1\right)\geqslant 1$，即$a+\ln a\geqslant 1$，则$g\left(a\right)\geqslant g\left(1\right)\Leftrightarrow a\geqslant 1$.

下证当$a\geqslant 1$时，$f\left(x\right)\geqslant 1$.易得$e^{x}\geqslant 1+x\left(x\in \mathbf{R}\right)$，则$x-1\geqslant \ln x\left(x>0\right)$。

故当$a\geqslant 1$时，$f\left(x\right)\geqslant e^{x-1}-\ln x\geqslant 1+\left(x-1\right)-\ln x\geqslant 1$.

综上，a的取值范围为$\left[1,+\infty\right)$.

点评　解法3是利用必要性探路取点，通过取特殊值$x=1$缩小范围，使得运算简化，然后先猜后证，最后再论证其严谨性.

一般地，解决恒成立问题，寻找必要条件，取特殊值是种常用的手段，对特殊值的选取可根据函数的特征，常取一些整数值，指数式和对数式取的值考虑使得超越式转化为非超越式，三角式取特殊角等[1].

三、变式拓展

（2020年福建省省质检·理21）已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{x}{a}-\ln\left(ax\right)$.

（1）求$f\left(x\right)$的极值；

（2）若$e^{x}\ln x+mx^{2}+\left(1-e^{x}\right)x+m\leqslant 0$，求正实数$m$的取值范围.

解：（1）当$a>0$时，$f\left(x\right)$的极小值为$f\left(a\right)=1-2\ln a$，无极大值；当$a<0$时，$f\left(x\right)$的极小值为$f\left(a\right)=1-2\ln\left(-a\right)$，无极大值.（过程略）

（2）因为$e^{x}\ln x+mx^{2}+\left(1-e^{x}\right)x+m\leqslant 0$，又因为$-x^{2}-1<0$，

所以$m\leqslant \dfrac{e^{x}\ln x+\left(1-e^{x}\right)x}{-x^{2}-1}$，由（1）知，$\ln x\leqslant x-1$，当且仅当$x=1$时等号成立.

所以$\dfrac{e^{x}\ln x+\left(1-e^{x}\right)x}{-x^{2}-1}\geqslant \dfrac{e^{x}\left(x-1\right)+\left(1-e^{x}\right)x}{-x^{2}-1}=\dfrac{e^{x}-x}{x^{2}+1}$，当且仅当$x=1$时等号成立.

令 $H(x)=\dfrac{e^x-x}{x^2+1}$， $x\in(0,+\infty)$，则 $H'(x)=\dfrac{(x-1)\left[e^x(x-1)+x+1\right]}{\left(x^2+1\right)^2}$，

令 $K(x)=e^x(x-1)+x+1$，

则 $K'(x)=xe^x+1>0$，所以 $K(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $K(x)>K(0)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时， $H'(x)<0$，当 $x>1$ 时， $H'(x)>0$，

所以 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $H(x)_{\min}=H(1)=\dfrac{e-1}{2}$，

综上当 $x=1$ 时， $y=\dfrac{e^x\ln x+\left(1-e^x\right)x}{-x^2-1}$ 取得最小值 $\dfrac{e-1}{2}$，

所以正实数 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{e-1}{2}\right]$.

四、总结

指数对数组合型的函数不等式问题，常用的解题方法有三种：一是指数对数分离并向易于求最值的常用函数转化；二是利用放缩消掉指数函数或对数函数之一，再进行处理；三是隐零点法. 对于具体问题，可根据函数特征具体分析，选择合适方法求解.

苏步青说过“学习数学要学得精、深、透，学到的知识也就扎实、牢靠. ”因此在教学中，教师应对试题多研究，关注试题的背景与内涵，关注试题的变式与拓展，这样的解题教学才能真正实现“做一题，透一点，通一类”，从而培养学生的思维，提升数学素养[2].

参考文献:

[1]蔡海涛. 探寻必要条件 巧解恒成立问题——从一道 2019 年高考函数导数题谈起[J]. 高中数学教与学，2019(11):16-18.

[2]唐凝. 空间问题平面化 溯源探秘显身手 [J]. 中学数学教学参考（下旬），2019(8):55-56.