例析求不等式最佳系数的常用策略

陈凌燕[1]　蔡海涛[2]

1. 厦门市海沧中学　361022　2.福建省莆田第二中学 351131

不等式是高中数学的重要内容，题型灵活多变，对学生的思维能力要求较高.其中,有一类已知含参不等式恒成立，求参数的最值（或范围）问题称为求不等式最佳系数问题，这类问题频频出现于高考、竞赛、质检试题中，综合性强，充分考查学生数形结合、分类与整合、化归与转化等数学思想.本文以几道高考和竞赛试题为例，分析这类问题常用策略，探寻破解之道.

一、参变分离，转化为一元函数最值问题

例 1（2020 年高考全国卷Ⅰ•理 21 节选）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

解 当 $x=0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$ 对任意 $a\in\mathrm{R}$ 恒成立

依题意,当 $x>0$ 时，$a\geqslant\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-\mathrm{e}^x}{x^2}$，令 $F(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-\mathrm{e}^x}{x^2}$，$F'(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3-x-2-x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x}{x^3}$，

令 $g(x)=\frac{1}{2}x^3-x-2-x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x$，$g'(x)=\frac{3}{2}x^2-1-(x-1)\mathrm{e}^x$，$g''(x)=3x-x\mathrm{e}^x=x(3-\mathrm{e}^x)$，

当 $0<x<\ln 3$ 时，$g''(x)>0$，当 $x>\ln 3$ 时，$g''(x)<0$，

因为 $g'(\ln 3)>g'(1)>0$，$g'(2)=5-\mathrm{e}^2<0$，且 $g'(x)$ 在 $(\ln 3,+\infty)$ 单调递减，

所以存在唯一 $x_0\in(\ln 3,2)$ 使得 $g'(x_0)=0$，

所以当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$g'(x)<0$，

因为 $g(2)=0$，所以当 $0<x<2$ 时，$g(x)>0$，即 $F'(x)>0$，

当 $x>2$ 时，$g(x)<0$，即 $F'(x)<0$，所以 $F(x)_{\max}=F(2)=\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4}$，所以 $a\geqslant\dfrac{7-\mathrm{e}^2}{4}$.

评析 一元含参不等式恒成立求参数的取值范围问题，往往将一个视为变量，另一个视为参数，从而将参数和变量分离，则问题转化为求一元函数的最值问题，突破了本题的难点.

二、多元化一元，转化为函数最值问题

1.通过等量关系实现消元

例 2（2020 年全国高中数学联赛福建省预赛）已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant ma^2$ 总成立，则 m 的最大值为______.

解 设$\mu=\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$，其中$a$、$b$、$c$为实数，$a\neq 0$，

当方程$ax^2+bx+c=0$有实根时，设其两根为x_1,x_2，由韦达定理知，

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，所以$\mu=\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}=\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}-1\right)^2$

$=(1+x_1+x_2)^2+(-x_1-x_2-x_1x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)\geqslant 2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{8}$.

当且仅当$x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$时，即$a=b=4c\neq 0$时等号成立. 因此μ的最小值为$\dfrac{9}{8}$.

所以，m的最大值为$\dfrac{9}{8}$.

评析 本题已知的不等式含有三个变量，而这三个变量相互约束，问题的关键在于如何消元，将其转化为函数的最值问题. 因为方程$ax^2+bx+c=0$有根，通过根与系数的关系实现这一转化，进而利用配方求得m的最大值.

2.通过均值不等式实现消元减元

例 3（2019 年全国高中数学联赛四川省预赛）设$a,b,c\in(0,1]$，λ为实数，使得$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+b+c}}\geqslant 1+\lambda(1-a)(1-b)(1-c)$恒成立，求$\lambda$的最大值。

解 由三元均值不等式，有$(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\left(1-\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$，

令$a+b+c=3x^2$，其中$x>0$，则$0<x\leqslant 1$，则问题转化为$\dfrac{1}{x}\geqslant 1+\lambda(1-x^2)^3$，求$\lambda$的最大值.

由六元均值不等式知：$x(1-x)^2(1+x)^3=27x(1-x)^2\left(\dfrac{1+x}{3}\right)^3\leqslant 27\left(\dfrac{x+2(1-x)+3\left(\dfrac{x+1}{3}\right)}{6}\right)^6=\dfrac{27}{64}$，

综上，λ的最大值为$\dfrac{64}{27}$.

评析 均值不等式实则多元变量的不等式，利用已知关系式构造相关均值不等式是求解多元变量最值的技巧之一[1]. 本题涉及的不等式有三个变量，而这三个变量是独立的，这类情形可以考虑根据式子的结构特征，选用适当的不等式将式子进行变形，划归为一元不等式问题，从而求解.

三、通过必要性进行特值探路，再证明充分性

例 4（2008 年全国高中数学联赛福建省预赛）求最小的正实数k，使得不等式

$ab+bc+ca+k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$，对所有的正实数$a,b,c$都成立.

解 当$a=b=c=1$时，可得$k\geqslant 2$，下证不等式

$ab+bc+ca+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$对所有的正实数$a,b,c$都成立.

由均值不等式$ab+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{ab\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=3$，同理可得$bc+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{bc\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=3$，

$ca+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{ca\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}}=3$，三式相加得$ab+bc+ca+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$，

综上，k的最小值为2.

评析 不等式恒成立本质上是满足条件的变量具有任意性，所以可利用必要条件探路，取一些特殊值先猜后证，适当的取值求出最佳系数，再证明其充分性即证明取此系数时不等式成立[2]. 对于恒成立问题，先考虑必要性求值，再证明其充分性，将复杂的问题简单化，可找到解决问题的捷径.“横看成岭侧成峰，远近高低各不同.”许多问题，如果换一个角度看，就能看到别样的“风景”[3].

例 4 求最大的常数k，使得对于$[0,1]$中的一切实数a,b,c,d，都有不等式

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant k(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

解 取$a=b=c=d=1$，则$4+4\geqslant 4k$得$k\leqslant 2$.

以下证明：对于$[0,1]$中的一切实数a,b,c,d，都有不等式

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

因为$b\leqslant 1$，$a^2\leqslant 1\leqslant b+1$，所以$(b-1)(a^2-b-1)\geqslant 0$，即$a^2b+1\geqslant a^2+b^2$，

同理有$b^2c+1\geqslant b^2+c^2$，$c^2d+1\geqslant c^2+d^2$，$d^2a+1\geqslant d^2+a^2$，

上述四个不等式相加，即$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

综上所述，k的最大值为2.

评析 本题含有四元不等式，学生不易讨论，难以完整作答. 所以考虑恒成立时的必要条件，对a,b,c,d取特殊值探路，缩小参数k的取值范围，再进行验证，这样运算简化了很多. 一般地，解决求不等式最佳系数问题，寻找必要条件，取特殊值是种常用的手段，对特殊值的选取可根据函数的特征，常取一些整数值，指数式和对数式取的值考虑使得超越式转化为非超越式，三角式取特殊角等. 取特殊值是基于数学简洁美的追求，考虑数学运算的简洁性[4].

总之，求不等式最佳系数问题有一定的技巧性. 教师要引导学生观察变量与参数的特征，如果是单变

量，先考虑是否可以参变分离（全部分离或部分分离）；如果是多元变量，则考虑几个变量之间的关系，消元转化或整体处理，目标把多元化为一元.希望通过以上例题的分析，能对读者有一定的启示.

参考文献:

[1]蔡海涛.由多元变量探究最值问题[J].中学数学教学参考，2018(1):104-105.

[2]蔡海涛.探寻必要条件 巧解恒成立问题[J].高中数学教与学，2019(11):16-18.

[3]单墫.解题漫谈[M].上海:上海教育出版社，2016.

[4]徐小平，林晴岚.至简至美　局部放缩　追本溯源——导数综合问题中特殊值的选取策略[J].数学通讯，2018(5):44-48.